宮崎国際大学「数学」・解答

1　(20 点)

【問１】 両辺を 12 倍して　$x-4<6(x+1)$

整理して　$-5x<10$

よって　$x>-2$　答

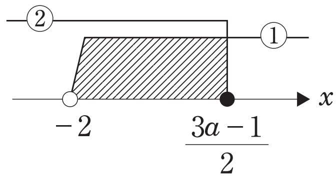
【問２】 $x>-2$ を満たす最小の整数 x であるから

$x=-1$　答

【問３】 ②を解くと　$x \leqq \dfrac{3a-1}{2}$

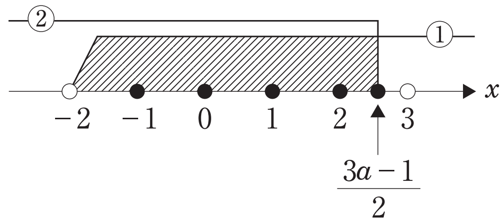
$\dfrac{3a-1}{2}=7$ より　$a=5$　答

【問４】 右の図のようになればよいから



$-2<\dfrac{3a-1}{2}$ より　$a>-1$　答

【問５】 $x>-2$ と $x \leqq \dfrac{3a-1}{2}$ の共通範囲に整数が $x=-1,\ 0,\ 1,\ 2$ のちょうど 4 個あるようにすればよいから



$2 \leqq \dfrac{3a-1}{2}<3$

これを解いて　$\dfrac{5}{3} \leqq a<\dfrac{7}{3}$　答

$\boxed{2}$　(20 点)

【問１】 $f(x)=(x-m)^2+m^2-4m+3$ より

頂点の座標は　$(m,\ m^2-4m+3)$　答

【問２】 $m^2-4m+3<0$ より　$(m-1)(m-3)<0$

よって　$1<m<3$　答

【問３】 (1)　$m=2$ のとき，$f(x)=(x-2)^2-1$ より

$y=f(x)$ は x^2 の係数が 1 でグラフの頂点は $(2,\ -1)$ である。

よって，$y=g(x)$ は x^2 の係数が -1 でグラフの頂点は $(2,\ 1)$ である。

ゆえに　$a=-1,\ p=2,\ q=1$　答

(2)　$g(x)=-(x-2)^2+1$

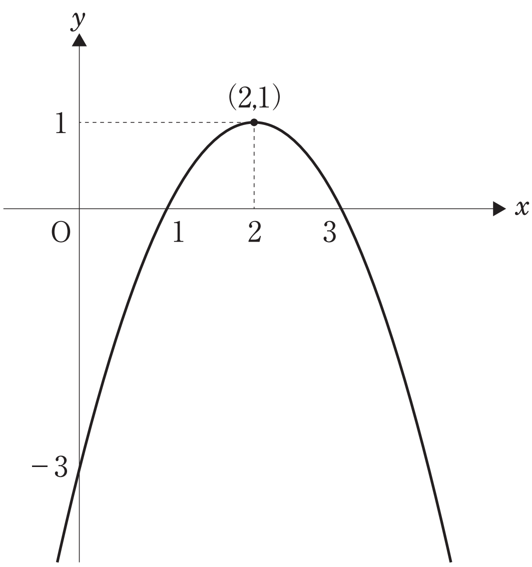
$=-x^2+4x-3$

$=-(x-1)(x-3)$ より

x 切片は　$x=1,\ 3$

y 切片は　$g(0)=-3$

よって，グラフは右のようになる。



【問４】 y を消去すると　$x^2-2mx+2m^2-4m+3=2x-8$　……①

整理して　$x^2-2(m+1)x+2m^2-4m+11=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

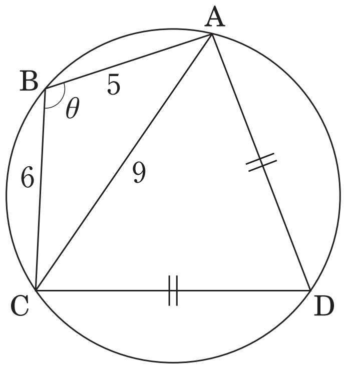
$$\frac{D}{4}=(m+1)^2-(2m^2-4m+11)$$

$$=-m^2+6m-10$$

$$=-(m-3)^2-1$$

m がどのような実数の値をとっても $D<0$ であるから，2 次方程式①は実数解をもたない。

よって，関数 $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=2x-8$ は共有点をもたない。



3 (20 点)

【問１】 △ ABC において，余弦定理から

$$\cos\theta = \frac{5^2+6^2-9^2}{2\cdot5\cdot6} = -\frac{1}{3}$$ 答

【問２】 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ より　$\sin\theta > 0$ であるから

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

半径 R の円は△ ABC の外接円であるから，正弦定理から

$$2R = \frac{\mathrm{CA}}{\sin\theta} = 9\div\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{27\sqrt{2}}{4}$$

よって　$R = \dfrac{27\sqrt{2}}{8}$ 答

【問３】 $\cos\angle\mathrm{ADC} = \cos(180^\circ-\theta) = -\cos\theta = \dfrac{1}{3}$

△ ACD において，$\mathrm{AD}=\mathrm{CD}=x$ とおくと，余弦定理から

$$9^2 = x^2+x^2-2\cdot x\cdot x\cdot\frac{1}{3}$$

整理して　$x^2 = \dfrac{243}{4}$

$x>0$ より　$x = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$　　　よって　$\mathrm{AD} = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ 答

【問４】 (1) $\cos\angle\mathrm{ADC} = \dfrac{1}{3} > 0$ であるから，$\angle\mathrm{ADC}$ は鋭角である。 答

(2) △ ACD において

$$\mathrm{AD}=\mathrm{CD}=\frac{9\sqrt{3}}{2},\ \mathrm{AC}=9$$

ここで，$\left(\dfrac{9\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{243}{4}$，$9^2 = 81 = \dfrac{324}{4}$ より　$\left(\dfrac{9\sqrt{3}}{2}\right)^2 < 9^2$

よって，$\dfrac{9\sqrt{3}}{2} < 9$ であるから，AC が最大辺であり，$\angle\mathrm{ADC}$ は最大角である。

ゆえに，内角の最大角が鋭角であるから△ ACD は鋭角三角形である。 答

4 (20点)

【問1】 $(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 1),\ (2,\ 1,\ 2),\ (2,\ 2,\ 1),\ (3,\ 1,\ 3),\ (3,\ 3,\ 1),$
$(4,\ 1,\ 4),\ (4,\ 2,\ 2),\ (4,\ 4,\ 1),\ (5,\ 1,\ 5),\ (5,\ 5,\ 1),$
$(6,\ 1,\ 6),\ (6,\ 2,\ 3),\ (6,\ 3,\ 2),\ (6,\ 6,\ 1)$

以上の14通り　答

【問2】 1から6の6個の数字から異なる3個を選んで1列に並べ，左から順に a，b，c とすればよいから

$${}_6P_3=6\cdot5\cdot4=120\text{(通り)}$$ 答

【問3】 a，b，c のうち少なくとも1つが偶数である場合であるから，全体の総数から a，b，c すべてが奇数である場合を除けばよい。

よって　$6^3-3^3=216-27=189$(通り)　答

【問4】 $a<b<c$ である場合は，1から6の6個の数字から異なる3個を選んで，小さい順に a，b，c とすればよいから

${}_6C_3$ 通り

目の出方の総数は 6^3 通りであるから，求める確率は

$$\frac{{}_6C_3}{6^3}=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{1}{6^3}=\frac{5}{54}$$ 答

【問5】 $a<b<c=5$ である確率は

$$\frac{{}_4C_2\times1}{6^3}=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}\times\frac{1}{6^3}=\frac{1}{36}$$

よって，求める条件付き確率は

$$\frac{1}{36}\div\frac{5}{54}=\frac{3}{10}$$ 答

(別解) $a<b<c=5$ である場合は ${}_4C_2\times1$ 通りあるから，求める条件付き確率は

$$\frac{{}_4C_2\times1}{{}_6C_3}=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}\times\frac{3\cdot2\cdot1}{6\cdot5\cdot4}=\frac{3}{10}$$ 答

$\boxed{5}$　(20 点)

【問１】　$f(2)=5$

$f'(x)=2x$ より $f'(2)=4$

よって，接線 l の方程式は

$y-5=4(x-2)$ より　　$y=4x-3$　答

【問２】　放物線 $y=g(x)$ は点 A$(2,\ 5)$ を通るから　$g(2)=-4+2m+n=5$ より

$2m+n=9$ ……①

$g'(x)=-2x+m$

点 A における接線が l であるから　$g'(2)=-4+m=4$ より

$m=8$　　……②

②を①に代入して　　$n=-7$

よって　　$m=8,\ n=-7$　答

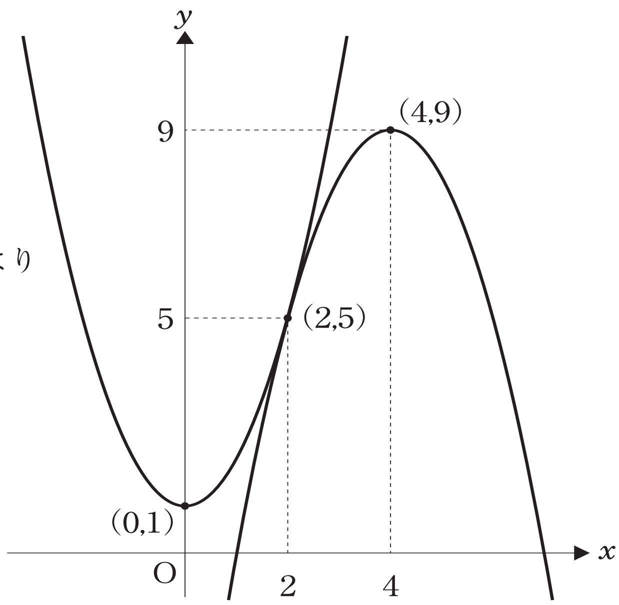
【問３】　放物線 $y=f(x)$ の頂点の座標は $(0,\ 1)$

放物線 $y=g(x)$ について，

$g(x)=-x^2+8x-7=-(x-4)^2+9$ より

頂点の座標は $(4,\ 9)$

よって，グラフは右の図の通り。



【問４】　$S=\int_0^2\left(x^2+1\right)dx-\int_1^2\left(-x^2+8x-7\right)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}x^3-4x^2+7x\right]_1^2$

$=\left(\frac{8}{3}+2\right)-0+\left(\frac{8}{3}-16+14\right)-\left(\frac{1}{3}-4+7\right)$

$=2$　答