

宮崎国際大学「数学」・解答

1

(20 点)

【問 1】 (1) ①から $4x - 8a - 12 < x - 5a$
 $3x < 3a + 12$
 よって $x < a + 4$ 答

(2) ②の両辺を 6 倍して
 $x - 1 - 3(x + a) < -2a$
 $-2x < a + 1$

よって

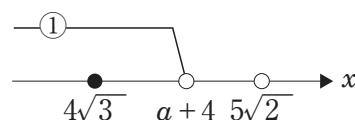
$$x > -\frac{a+1}{2} \quad \text{答}$$

【問 2】 $4\sqrt{3} < a + 4 \leq 5\sqrt{2}$
 を満たす整数 a を求めればよい。

$4\sqrt{3} = \sqrt{48}$, $5\sqrt{2} = \sqrt{50}$ であるから
 $\sqrt{48} < \sqrt{49} < \sqrt{50}$ すなわち $4\sqrt{3} < 7 < 5\sqrt{2}$

よって $a + 4 = 7$

ゆえに $a = 3$ 答

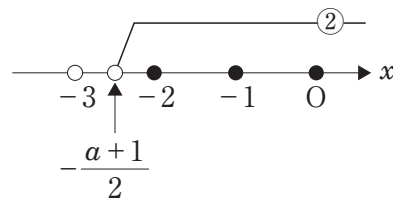


【問 3】 右の図から

$$-3 \leq -\frac{a+1}{2} < -2$$

これを解いて $3 < a \leq 5$

a は整数であるから $a = 4, 5$ 答



(別解) (i) a が偶数のとき, 解が $x > -\frac{5}{2}$ であればよいから

$$-\frac{a+1}{2} = -\frac{5}{2} \text{ より } a = 4$$

(ii) a が奇数のとき, 解が $x > -3$ であればよいから

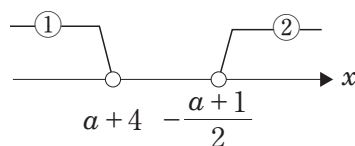
$$-\frac{a+1}{2} = -3 \text{ より } a = 5$$

(i), (ii) より $a = 4, 5$ 答

【問 4】 右の図から

$$a + 4 \leq -\frac{a+1}{2}$$

これを解いて $a \leq -3$



これを満たす最大の整数 a は

$$a = -3 \quad \boxed{\text{答}}$$

【問5】 a は整数より $a+4$ は整数であるから、2つの不等式①, ②を同時に満たす整数 x がちょうど10個あるのは

$$10 < (a+4) - \left(-\frac{a+1}{2}\right) \leq 11$$

のときである。

これを解いて

$$\frac{11}{3} < a \leq \frac{13}{3}$$

a は整数であるから $a = 4 \quad \boxed{\text{答}}$

(別解1) a は整数であるから、 $a+4$ は整数である。

a が奇数のとき $-\frac{a+1}{2}$ は整数であり、

a が偶数のとき $-\frac{a+1}{2}$ の小数部分は0.5である。

よって $(a+4) - \left(-\frac{a+1}{2}\right) = 11$ または 10.5

これを解いて

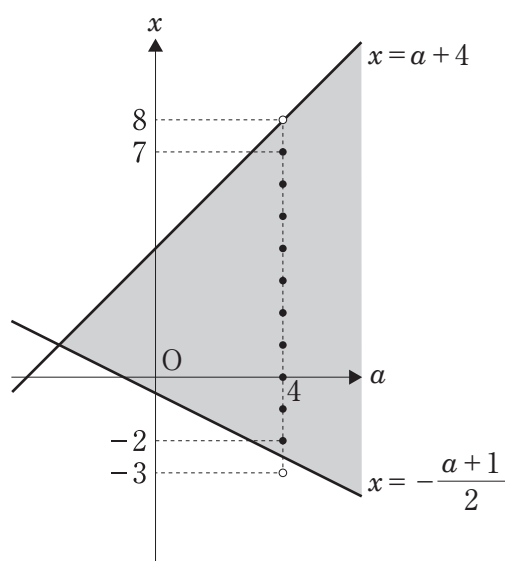
$$a = \frac{13}{3}, 4$$

a は整数であるから $a = 4 \quad \boxed{\text{答}}$

(別解2) 2つの不等式を同時に満たす領域(右図の網掛けの部分で境界線は含まない)の格子点の個数を調べる。

1つの整数 a の値に対して整数 x がちょうど10個ある場合を求めて

$$a = 4 \quad \boxed{\text{答}}$$



2

(20 点)

【問 1】 (1) $y=f(x)$ のグラフが 2 点 $(-1, 6)$, $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ を通るから

$$f(-1)=3a+b=6, \quad f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}a+b=-\frac{3}{2}$$

これを解いて

$$a=2, \quad b=0 \quad \text{答}$$

$$(2) (1) \text{より } f(x)=2x^2-4x$$

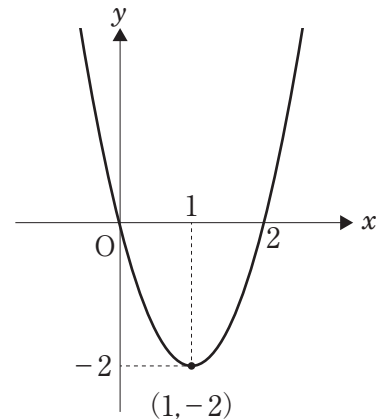
$$f(x)=2(x-1)^2-2 \text{ より}$$

頂点の座標は $(1, -2)$

また $f(x)=2x(x-2)=0$ とすると

$$x=0, \quad 2$$

よって、グラフは右のようになる。



【問 2】 $y=f(x)=a(x-1)^2-a+b$ のグラフは、
放物線 $y=3x^2$ を平行移動したものであるから

$$a=3$$

このとき、頂点は点 $(1, b-3)$ であり、

直線 $y=4x-9$ 上にあるから

$$b-3=4 \cdot 1 - 9 \text{ より } b=-2$$

$$\text{よって } a=3, \quad b=-2 \quad \text{答}$$

【問 3】 (1) 上に凸の放物線であるから $a < 0$ 答

(2) グラフの y 切片が正であるから $b > 0$ 答

(3) $ax^2-2ax+b=0$ の判別式を D とすると、グラフが x 軸と異なる 2 点で交わっているから $D > 0$

$$\text{よって } \frac{D}{4}=a^2-ab > 0 \quad \text{答}$$

(別解 1) 頂点の y 座標が正であるから $-a+b > 0$ すなわち $a-b < 0$

(1)より $a < 0$

$$\text{よって } a^2-ab=a(a-b) > 0 \quad \text{答}$$

(別解 2) (1)より $a < 0$ で、(2)より $b > 0$ であるから

$$a-b < 0$$

$$\text{よって, } a^2-ab=a(a-b) > 0 \quad \text{答}$$

- (4) グラフ上の点 $(3, f(3))$ が x 軸より上側にあるから

$$f(3) = 3a + b > 0 \quad \text{答}$$

- (5) グラフと x 軸の交点の x 座標は

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - ab}}{a}$$

$$a < 0 \text{ であるから } \frac{a + \sqrt{a^2 - ab}}{a} < \frac{a - \sqrt{a^2 - ab}}{a}$$

$$\text{図より } \frac{a - \sqrt{a^2 - ab}}{a} > 3 \text{ であるから } \frac{a - \sqrt{a^2 - ab}}{a} - 3 > 0 \quad \text{答}$$

- (6) グラフおよび x 軸の 2 つの交点は軸 $x=1$ に関して対称であり、左の交点は、軸 $x=1$ に関して点 $(3, 0)$ と対称な点 $(-1, 0)$ の左側にある。

$$\text{よって } \frac{a + \sqrt{a^2 - ab}}{a} < -1 \text{ であるから } \frac{a + \sqrt{a^2 - ab}}{a} + 1 < 0 \quad \text{答}$$

【問 4】 (i) $a > 0$ のとき

右の図から

$$\text{最大値 } f(3) = 3a + b = 7$$

$$\text{最小値 } f(1) = -a + b = -1$$

これを解いて

$$a = 2 (a > 0 \text{ に適する}), b = 1$$

- (ii) $a < 0$ のとき

右の図から

$$\text{最大値 } f(1) = -a + b = 7$$

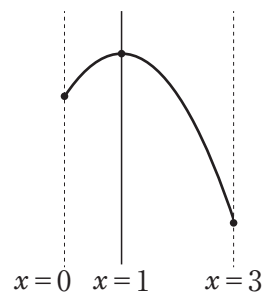
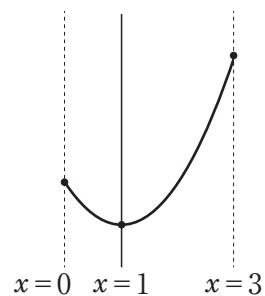
$$\text{最小値 } f(3) = 3a + b = -1$$

これを解いて

$$a = -2 (a < 0 \text{ に適する}), b = 5$$

- (i), (ii)より

$$(a, b) = (2, 1), (-2, 5) \quad \text{答}$$



3

(20 点)

【問 1】 $BC = x$ とおくと, $\triangle ABC$ において, 余弦定理から

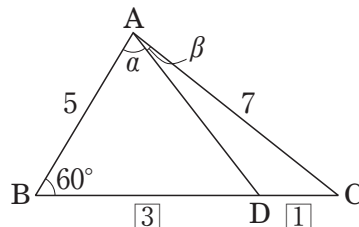
$$7^2 = 5^2 + x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x \cdot \cos 60^\circ$$

$$x^2 - 5x - 24 = 0$$

$$(x+3)(x-8) = 0$$

$$x > 0 \text{ より } x = 8$$

よって $BC = 8$ 答



【問 2】 $BD : DC = 3 : 1$ より $BD = \frac{3}{4}BC = 6$

$\triangle ABD$ において, 余弦定理から

$$AD^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 31$$

$$AD > 0 \text{ より } AD = \sqrt{31}$$

$\triangle ABD$ において, 正弦定理から

$$\frac{6}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{31}}{\sin 60^\circ}$$

$$\text{よって } \sin \alpha = \frac{6}{\sqrt{31}} \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}} = \frac{3\sqrt{93}}{31} \quad \text{答}$$

【問 3】 $\sin^2 \alpha = \left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}} \right)^2 = \frac{27}{31}$, $\sin^2 60^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{3}{4}$ より $\sin^2 \alpha > \sin^2 60^\circ$ であるから

$$\sin \alpha > \sin 60^\circ \text{ すなわち } 60^\circ < \alpha < 120^\circ \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\triangle ABC$ は鋭角三角形であるから $\angle BAC < 90^\circ$

$$\alpha < \angle BAC \text{ であるから } \alpha < 90^\circ \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } 60^\circ < \alpha < 90^\circ \text{ オ 答}$$

(別解) $\triangle ABD$ において, $BD = 6$, $AD = \sqrt{31}$ より $BD > AD$

$$\text{よって } \angle BAD > \angle ABD \text{ すなわち } \alpha > 60^\circ \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\triangle ABC$ は鋭角三角形であるから $\angle BAC < 90^\circ$

$$\alpha < \angle BAC \text{ であるから } \alpha < 90^\circ \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } 60^\circ < \alpha < 90^\circ \text{ オ 答}$$

【問 4】 $\triangle ABD : \triangle ACD = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{31} \cdot \sin \alpha : \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \sqrt{31} \cdot \sin \beta$

$$= 5 \sin \alpha : 7 \sin \beta \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{また } \triangle ABD : \triangle ACD = BD : CD = 3 : 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ より } 5 \sin \alpha : 7 \sin \beta = 3 : 1 \text{ であるから}$$

$$5 \sin \alpha = 7 \sin \beta$$

$$\text{よって } \sin \alpha : \sin \beta = 7 : 5 \quad \text{答}$$

【問5】 $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ それぞれにおいて, 正弦定理から

$$2R_1 = \frac{6}{\sin \alpha}, \quad 2R_2 = \frac{2}{\sin \beta} \quad \text{すなわち} \quad R_1 = \frac{3}{\sin \alpha}, \quad R_2 = \frac{1}{\sin \beta}$$

$$\text{よって} \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{3}{\sin \alpha} \div \frac{1}{\sin \beta} = \frac{3 \sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$\text{ここで, } \sin \alpha : \sin \beta = 21 : 5 \text{ より} \quad \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{5}{21} \text{ であるから}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = 3 \cdot \frac{5}{21} = \frac{5}{7} < 1$$

$$\text{ゆえに} \quad R_1 < R_2 \quad \text{ア} \quad \boxed{\text{答}}$$

(別解) (3行目以降)

$$\sin \alpha : \sin \beta = 21 : 5 \text{ より} \quad \sin \alpha = 21k, \quad \sin \beta = 5k \text{ とおける。}$$

$$\text{ただし, } \sin \alpha > 0 \text{ より} \quad k > 0$$

$$\text{このとき} \quad R_1 - R_2 = \frac{3}{\sin \alpha} - \frac{1}{\sin \beta} = \frac{3}{21k} - \frac{1}{5k} = -\frac{2}{35k} < 0$$

$$\text{よって} \quad R_1 < R_2 \quad \text{ア} \quad \boxed{\text{答}}$$

4

(20 点)

【問 1】 (i) 赤球 2 個のとき

この確率は

$$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = 1 \times \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 4} = \frac{1}{10}$$

(ii) 白球 2 個のとき

この確率は

$$\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = 3 \times \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 4} = \frac{3}{10}$$

(i)と(ii)は互いに排反であるから、求める確率は

$$\frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \quad \boxed{\text{答}}$$

(別解) 異なる色である確率は

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} = 2 \times 3 \times \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 4} = \frac{3}{5}$$

よって、同じ色である確率は、余事象の確率より

$$1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \quad \boxed{\text{答}}$$

【問 2】 袋 A から赤球 1 個と白球 1 個を取り出し、袋 B から白球 2 個を取り出すときであるから、求める確率は

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} \times \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = 2 \times 3 \times \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 4} \times 3 \times \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 4} = \frac{9}{50} \quad \boxed{\text{答}}$$

【問 3】 袋 A から赤球 1 個と白球 1 個を取り出し、袋 B から赤球 2 個を取り出すときであるから、求める確率は

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} \times \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = 2 \times 3 \times \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 4} \times 1 \times \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 4} = \frac{3}{50} \quad \boxed{\text{答}}$$

【問 4】 袋 A に入っている赤球が 2 個である事象は、赤球が 1 個または 3 個である事象の余事象であるから、この確率は

$$1 - \left(\frac{9}{50} + \frac{3}{50} \right) = 1 - \frac{6}{25} = \frac{19}{25}$$

袋 A から赤球 1 個と白球 1 個を取り出し、袋 A に赤球が 2 個あるのは袋 B から赤球 1 個と白球 1 個を取り出すときで、この確率は

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} \times \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} = 2 \times 3 \times \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 4} \times 2 \times 3 \times \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 4} = \frac{9}{25}$$

よって、求める条件付き確率は

$$\frac{9}{25} \div \frac{19}{25} = \frac{9}{19} \quad \boxed{\text{答}}$$

5

(20 点)

【問 1】 $y=x^2$ より $y'=2x$ であるから, 点 A における接線の傾きは $2a$ よって, 直線 l の傾きは $-\frac{1}{2a}$ であり, その方程式は

$$y-a^2=-\frac{1}{2a}(x-a) \quad \text{すなわち} \quad y=-\frac{1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2} \quad \boxed{\text{答}}$$

【問 2】 放物線 C と直線 l の方程式から y を消去して

$$x^2=-\frac{1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2}$$

$$x^2+\frac{1}{2a}x-a^2-\frac{1}{2}=0$$

$$(x-a)\left(x+a+\frac{1}{2a}\right)=0$$

よって, 交点 B の x 座標は, $x \neq a$ より $x=-a-\frac{1}{2a}$ $\boxed{\text{答}}$ **【問 3】**

$$\begin{aligned} (1) \quad \int_a^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx &= \int_a^\beta \{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\right]_a^\beta \\ &= \frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2)+\alpha\beta(\beta-\alpha) \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)\{2(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)-3(\alpha+\beta)^2+6\alpha\beta\} \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)(-\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2) \\ &= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \quad \boxed{\text{終}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{別解 1}) \quad \int_a^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx &= \int_a^\beta (x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}dx \\ &= \int_a^\beta \{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\right]_a^\beta \\ &= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \quad \boxed{\text{終}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(別解2)} \quad & \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\} dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)x^2 + \alpha\beta x \right]_{\alpha}^{\beta} \\
&= \left\{ \frac{1}{3}\beta^3 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\beta^2 + \alpha\beta^2 \right\} - \left\{ \frac{1}{3}\alpha^3 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\alpha^2 + \alpha^2\beta \right\} \\
&= \frac{1}{3}\beta^3 - \frac{1}{2}\alpha\beta^2 - \frac{1}{2}\beta^3 + \alpha\beta^2 - \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{1}{2}\alpha^3 + \frac{1}{2}\alpha^2\beta - \alpha^2\beta \\
&= \frac{1}{6}\alpha^3 - \frac{1}{2}\alpha^2\beta + \frac{1}{2}\alpha\beta^2 - \frac{1}{6}\beta^3 = \frac{1}{6}(\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3) \\
&= \frac{1}{6}(\alpha - \beta)^3 = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \quad \boxed{\text{終}}
\end{aligned}$$

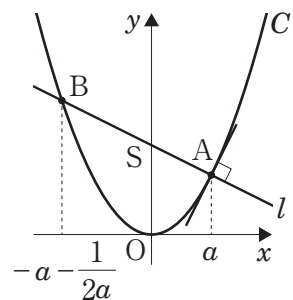
$$(2) \quad a > 0 \text{ より } -a - \frac{1}{2a} < 0 \text{ であるから } -a - \frac{1}{2a} < a$$

$$-a - \frac{1}{2a} \leq x \leq a \text{ において, } x^2 \leq -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2} \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-a-\frac{1}{2a}}^a \left\{ \left(-\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2} \right) - x^2 \right\} dx \\
&= - \int_{-a-\frac{1}{2a}}^a (x-a) \left(x+a+\frac{1}{2a} \right) dx
\end{aligned}$$

ここで, (1)で証明した等式を用いると

$$S = \frac{1}{6} \left\{ a - \left(-a - \frac{1}{2a} \right) \right\}^3 = \frac{1}{6} \left(2a + \frac{1}{2a} \right)^3 \quad \boxed{\text{答}}$$



$$(3) \quad a > 0, \quad \frac{1}{2a} > 0 \text{ であるから, 相加平均と相乗平均の関係から}$$

$$2a + \frac{1}{2a} \geq 2\sqrt{2a \cdot \frac{1}{2a}} = 2$$

等号が成り立つのは $2a = \frac{1}{2a}$ のときで, $a > 0$ より $a = \frac{1}{2}$ のときである。

$$\text{よって } S = \frac{1}{6} \left(2a + \frac{1}{2a} \right)^3 \geq \frac{1}{6} \cdot 2^3 = \frac{4}{3}$$

ゆえに, $a = \frac{1}{2}$ のとき S は最小値 $\frac{4}{3}$ をとる。 $\boxed{\text{答}}$

$$(4) \quad S = \frac{1}{6} \left(2a + \frac{1}{2a} \right)^3 = \frac{9}{2} \text{ とおくと } \left(2a + \frac{1}{2a} \right)^3 = 27 = 3^3$$

$$2a + \frac{1}{2a} \text{ は実数であるから } 2a + \frac{1}{2a} = 3$$

$$\text{整理して } 4a^2 - 6a + 1 = 0$$

$$\text{これを解いて } a = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4} \quad (a > 0 \text{ に適する})$$

$$\text{よって } a = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4} \quad \boxed{\text{答}}$$